



Mu'tah University
Deanship of the Graduate Studies

ON BERNSTEIN POLYNOMIALS AND APPROXIMATION

By
Shahrazad Naser AL-Dalaeen

Supervised By
Prof. Rateb AL-Btoush

**This Thesis was Submitted to the Deanship of the Graduate
Studies in Partial Fulfillment of the Requirements for the
Master's Degree of Science in Department of Mathematics
and Statistics**

Mu'tah University, 2015

DEDICATION

To my parents and my sisters with love and respect.

Shahrazad AL-Dalaeen

ACKNOWLEDGEMENT

“Praise be to Allah, Who has guided us to this (felicity): never could we have found guidance, had it not been for the guidance of Allah”.

I would like to express my sincere appreciation to my supervisor Dr. Rateb AL-Btoush for his valuable assistance and continuous guidance.

Special thanks to members of the examination committee.

I am grateful to my school manager Mai AL-Mbaydeen for her support and assistance.

Finally, love and gratitude go to my family and my friends for their encouragement and interest in seeing this thesis complete.

Shahrazad. N. Al-Dalaeen

LIST OF CONTENTS

DEDICATION	2
ACKNOWLEDGEMEN	3
List of Contents.....	4
List of Figures	6
List of Symbols	7
الملخص	9
ABSTRACT	10
Chapter One: Introduction	خطأ! الإشارة المرجعية غير معروفة.
1.1 Preface	خطأ! الإشارة المرجعية غير معروفة.
1.2 Structure of the Thesis.....	خطأ! الإشارة المرجعية غير معروفة.
Chapter Two: Preliminaries	خطأ! الإشارة المرجعية غير معروفة.
2.1 Preliminary and Definitions	خطأ! الإشارة المرجعية غير معروفة.
2.2 Convexity	خطأ! الإشارة المرجعية غير معروفة.
2.3 Best Approximation	خطأ! الإشارة المرجعية غير معروفة.
Chapter Three: Bernstein Polynomials	خطأ! الإشارة المرجعية غير معروفة.
3.1 Introduction	خطأ! الإشارة المرجعية غير معروفة.
3.2 Definition of the Bernstein Polynomials.....	خطأ! الإشارة المرجعية غير معروفة.
3.3 Properties of Bernstein Polynomials.....	خطأ! الإشارة المرجعية غير معروفة.
3.4 Examples of Bernstein polynomials.....	خطأ! الإشارة المرجعية غير معروفة.
3.5Convergence of Bernstien Polynomials and it's Derivatives.....	خطأ! الإشارة المرجعية غير معروفة.
Chapter Four: B´ezier Curves And Jackson Theorem.....	خطأ! الإشارة المرجعية غير معروفة.
4.1 B´ezier Curves	خطأ! الإشارة المرجعية غير معروفة.
4.1.1 Introduction.....	خطأ! الإشارة المرجعية غير معروفة.
4.1.2 Types of B´ezier Curves.....	خطأ! الإشارة المرجعية غير معروفة.
4.1.3 B´ezier Curves of Various Degrees.....	خطأ! الإشارة المرجعية غير معروفة.
4.1.4 Properties of B´ezier Curves	خطأ! الإشارة المرجعية غير معروفة.
4.1.5 Derivatives of B´ezier Curves.....	خطأ! الإشارة المرجعية غير معروفة.
4.1.6 Integrating Bernstein polynomials.....	خطأ! الإشارة المرجعية غير معروفة.
4.1.7 Subdivision of B´ezier Curves.....	خطأ! الإشارة المرجعية غير معروفة.
4.1.8 Distance between Two B´ezier Curves.....	خطأ! الإشارة المرجعية غير معروفة.

4.1.9 Convex hull property	خطأ! الإشارة المرجعية غير معرّفة.
4.1.10 Dimensional Bézier Curves	خطأ! الإشارة المرجعية غير معرّفة.
4.1.11 Explicit Bézier Curves	خطأ! الإشارة المرجعية غير معرّفة.
4.1.12 Rational Bézier Curves	خطأ! الإشارة المرجعية غير معرّفة.
4.2 Jackson Theorem and Corollaries	خطأ! الإشارة المرجعية غير معرّفة.
CHAPTER FIVE: CONCLUSIONS AND RECOMMENDATIONS	شارة المرجعية غير معرّفة.
5.1 Conclusions	خطأ! الإشارة المرجعية غير معرّفة.
5.2 Recommendations	خطأ! الإشارة المرجعية غير معرّفة.
REFERENCES	خطأ! الإشارة المرجعية غير معرّفة.

LIST OF FIGURES

- Figure (2.1): Convex not convex. خطأ! الإشارة المرجعية غير معرفة.
- Figure (3.1): The Bernstein polynomials of degree 1. خطأ! الإشارة المرجعية غير معرفة.
- Figure (3.2): The Bernstein polynomials of degree 2. خطأ! الإشارة المرجعية غير معرفة.
- Figure (3.3): The Bernstein polynomials of degree 3. خطأ! الإشارة المرجعية غير معرفة.
- Figure (4.1): Center of mass of four points خطأ! الإشارة المرجعية غير معرفة.
- Figure (4.2) (4,3): Polygon formed..... خطأ! الإشارة المرجعية غير معرفة.
- Figure (4.4): Examples of cubic B'ezier curves. خطأ! الإشارة المرجعية غير معرفة.
- Figure (4.5): B'ezier curves of various degree .. خطأ! الإشارة المرجعية غير معرفة.
- Figure (4.6): Moving a control point خطأ! الإشارة المرجعية غير معرفة.
- Figure (4.7): Hodograph. خطأ! الإشارة المرجعية غير معرفة.
- Figure (4.8): Subdividing a cubic Bezier curve. خطأ! الإشارة المرجعية غير معرفة.
- Figure (4.9): Difference curve. خطأ! الإشارة المرجعية غير معرفة.
- Figure (4.10): A Bezier curve in the convex hull. خطأ! الإشارة المرجعية غير معرفة.
- Figure (4.11): Explicit B'ezier curve..... خطأ! الإشارة المرجعية غير معرفة.
- Figure (4.12): Rational B'ezier curve خطأ! الإشارة المرجعية غير معرفة.
- Figure (4.13): The effect of changing a control point weight.. خطأ! الإشارة المرجعية غير معرفة.
- Figure (4.14): Closed Bézier curve..... خطأ! الإشارة المرجعية غير معرفة.

LIST OF SYMBOLS

Symbol	Meaning
E_n	The error of best approximation to $f(x)$ by the polynomials belonging to π_n .
$\omega(\delta)$	Modulus of continuity of f on I .
$\ \cdot\ $	Norm.
$\ \cdot\ _2$	L_2 norm.
$\ \cdot\ _\infty$	The maximum norm or infinte norm.
Δ	Forward difference operator .
$p^* \in \pi_n$	Best approximation to $f(x)$ by the polynomials belonging to π_n .
L_n	Linear monotone operator.
$d(x, y)$	Distance from x to y .
$f \in Lip$	f satisfy the Lipschitz condition.
$B_n(f; x)$	Bernstein polynomials.
$C[0, 1]$	Space of Continuous functions on closed interval $[0, 1]$.
ζ	Point in the open interval.
$p(t)$	Bézier curve.
\mathbb{R}^d	Euclidean space, such that $d = \{2, 3\}$.
\mathbb{R}	Real line.
$\Delta_h^k f(x)$	k th -order forward difference of $f(x)$ with step length h .
$ f(x) \leq M$	Function f is bound .
$B_n(1)(x)$	The Bernstein polynomial of function $f = 1$.

$B_n(x)(x)$	The Bernstein polynomial of function $f = x$.
$B_n(x^2)(x)$	The Bernstein polynomial of function $f = x^2$.
$N \in \mathbb{N}$	Natural number.
$P_n(x)$	Sequence of polynomials.
D_i	Control points of the first derivative Bézier curve.
$j_{n\mathbb{B}}(x)$	Jackson polynomial by algebraic polynomials (Bernstein polynomials).
$j_n(x)$	Jackson polynomial by trigonometric polynomials.
$R_n(x)$	Remainder term on Taylor series.
w_i	Weights of control points.
$R(t)$	Rational Bézier curves.
$C^0[a, b]$	Continuous function on the closed interval $[a, b]$.
$B(S)$	Class of functions which are bounded on S .
2D	Space in two dimension
CAD software	computer-aided design and drafting (CADD), is the use of computer technology for design and design documentation.

2015

.

.

.

.()

.

ABSTRACT

ON BERNSTEIN POLYNOMIALS AND APPROXIMATION

Shahrazad Naser AL-Dalaeen

Mu'tah University, 2015

In this thesis some properties of Bernstein polynomials have been studied and justified. Such properties have been used for building the proof of weierstrass theorem in details. Extra results are obtained regarding Bernstein polynomials, which are used to introduce Jackson theorem. Similar result is obtained by replacing the trigonometric polynomials in Jackson theorem by (Bernstein polynomials).

Finally, as an application of Bernstein polynomials in approximation, Bézier curves are studied which are widely used in computer graphics to model smooth curves.